

Приложение 2 к РПД
Алгебра и теория чисел
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль)
Математика. Физика
Форма обучения – очная
Год набора – 2022

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ
ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

| | | |
|----|--------------------------|--|
| 1. | Кафедра | Математики, физики и информационных технологий |
| 2. | Направление подготовки | 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) |
| 3. | Направленность (профили) | Математика. Физика |
| 4. | Дисциплина (модуль) | Б1.О.03.02 Алгебра и теория чисел |
| 5. | Форма обучения | очная |
| 6. | Год набора | 2022 |

2. Перечень компетенций

| |
|--|
| – ОПК-8: Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний |
|--|

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

| Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины) | Формируемая компетенция | Критерии и показатели оценивания компетенций | | | Формы контроля сформированности и компетенций |
|--|-------------------------|--|--|---|---|
| | | Знать: | Уметь: | Владеть: | |
| Основные понятия алгебры | ОПК-8 | основные понятия | доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме | навыками работы с многомерными векторами | Решение задач. |
| Элементы теории чисел | ОПК-8 | основные понятия, и алгоритмы работы, приложения к шифрованию данных | решать задачи по данной теме | придавать задачам конкретной предметной области математическую форму, | Решение задач. |
| Матрицы и определители | ОПК-8 | основные понятия и алгоритмы работы с матрицами | доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме | придавать задачам конкретной предметной области математическую форму, | Коллоквиум |
| Системы линейных уравнений. | ОПК-8 | основные понятия и методы | доказывать основные теоремы, решать задачи по данной теме | навыками решения и исследования систем линейных уравнений | Решение задач. |
| Векторные пространства | ОПК-8 | общее понятие линейного пространства | применять теоретический материал | навыками применения алгебраических методов к решению геометрических задач | Коллоквиум |
| Многочлены | ОПК-8 | основные понятия и алгоритмы работы с многочленами | творчески подходить к решению задач | навыками решения и исследования алгебраических уравнений | Решение задач. |
| Линейные преобразования | ОПК-8 | основные понятия и теоремы о линейных преобразованиях | ориентироваться в нестандартных условиях и ситуациях, анализировать возникающие проблемы | навыками вычисления матриц преобразования | Коллоквиум |
| Теория колец | ОПК-8 | аксиомы основных алгебраических классов систем | применять теоретический материал | исследовать имеющуюся задачу и строить ее математическую модель | Коллоквиум |
| Алгебраические | ОПК-8 | понятие | применять теоретический | навыками исследования | Решение задач. |

| Этап формирования | Формируемая | Критерии и показатели оценивания компетенций | | | Формы контроля сформированности |
|-------------------|-------------|--|----------|--|---------------------------------|
| | | Знать: | Уметь: | Владеть: | |
| расширения полей | | алгебраического расширения | материал | вопросов алгебраической неразрешимости | Коллоквиум |

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы: «неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1 Решение задач

- 20 баллов выставляется, если студент решил все рекомендованные задачи.
- 16-19 баллов выставляется, если студент решил не менее 80% рекомендованных задач.
- 8-15 баллов выставляется, если студент решил не менее 40% рекомендованных задач.
- 0-7 баллов - если студент выполнил менее 40% задания.

4.2 Коллоквиум

- 10-13 баллов выставляется, если студент ответил на все основные и дополнительные вопросы.
- 7-9 баллов выставляется, если студент ответил на все основные вопросы, но опустил некоторые важные детали.
- 4-6 балла выставляется, если студент ответил на половину вопросов.
- 0-3 баллов - если студент не ответил на вопросы или ответил частично.

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

5.1 Типовые контрольные задания на решение задач

Задание 1.

Задача 1. Найти размерность векторного пространства матриц размера 3×2 .

Задача 2. Найти координаты вектора $a = (0, 13, -5, 8)$ в базисе $e_1 = (-1, -1, -2, -3)$, $e_2 = (-1, 4, 0, 3)$, $e_3 = (4, -3, -1, -1)$, $e_4 = (1, 1, -2, 0)$.

Задача 3. Определить, какие из систем векторов линейно зависимы, а какие - нет:

а) $a_1 = (1, -1, 5, -4, -1)$, $a_2 = (5, 1, 1, -4, -1)$, $a_3 = (-3, 0, -3, 4, 1)$.

б) $a_1 = (-5, -1, -1, -1, -2)$, $a_2 = (3, 0, 0, 0, 1)$, $a_3 = (5, -1, 1, 2, 0)$, $a_4 = (-2, 0, -1, -1, 0)$.

в) $a_1 = (-1, -2, 4, 2, 1)$, $a_2 = (0, -2, 0, -1, -1)$, $a_3 = (1, 1, -5, -3, -1)$.

Задача 4. Найти размерность линейной оболочки системы векторов

$a_1 = (-2, 2, 1, -2, -1, 0)$, $a_2 = (-5, 5, 4, -4, -3, 2)$, $a_3 = (-3, 3, 3, -2, -2, 2)$, $a_4 = (-1, 1, -1, -2, 0, -2)$.

Задача 5. Подпространство L пространства R^3 определяется как множество всех векторов, параллельных плоскости $x + y + z = 1$. Найти базис и размерность L .

Задание 2.

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Задача 2. Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_5 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = -27 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 18 \end{cases}$$

Задача 3. Определить, является ли данная система линейных уравнений совместной.

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7 = -10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 + x_6 + 2x_7 = -4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 4x_5 + x_6 = -4 \\ -x_1 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 4x_7 = 2 \\ x_1 - 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 + 4x_6 - 3x_7 = -13 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 - 2x_6 + 4x_7 = 8 \\ -x_3 - x_4 - x_6 - x_7 = 2 \end{cases}$$

Задание 3.

Задача 1. Пусть $a = (-2, 2, 1, -2)$, $b = (-5, -4, -3, 2)$, $c = (-3, 2, 2, -2)$.
Вычислить $(2a+3b, a+b-2c)$.

Задача 2. Пусть $a = (-1, 1, 1, -1)$, $b = (-1, -1, 1, 1)$, $c = (1, 2, 2, 1)$, $d = (-4, 2, 2, -4)$.
Определить, какие пары этих векторов ортогональны.

Задача 3. С помощью процедуры ортогонализации найти ортогональный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (-2, -1, 0, -1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $a_3 = (-1, -2, 1, -1, 1)$, $a_4 = (0, 2, 0, 1, 1)$.

Задача 4. Найти координаты вектора $a = (7/5, 26/5, -16/5, 12/5)$ в ортонормированном базисе $e_1 = 1/5(1, 2, 2, 4)$, $e_2 = 1/5(-4, -2, 2, 1)$, $e_3 = 1/5(2, -4, -1, 2)$, $e_4 = 1/5(2, -1, 4, -2)$.

Задача 5. С помощью процедуры ортогонализации найти расстояние между параллельными прямыми в пространстве:

$$l_1: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+4}{-4} \text{ и } l_2: \frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-4}$$

Задача 6. С помощью процедуры ортогонализации найти расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве:

$$l_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+4}{-4} \text{ и } l_2: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-3}{-2}$$

Задание 4.

Задача 1. Разделить с остатком многочлен

$$f(x) = 6x^5 + 13x^4 + 14x^3 + 10x^2 + 5x + 2 \text{ на } g(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

Задача 2. Найти НОД многочленов $f(x) = x^5 + 4x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 7x + 2$ и $g(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$

Задача 3. Найти все рациональные корни многочлена $f(x) = 6x^5 + 11x^4 + 11x^3 + 7x^2 - 32x + 12$

Задача 4. Найти собственные числа матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Задача 5. Найти ортогональную замену переменных, приводящую квадратичную форму $F(x, y, z) = 202x^2 + 125y^2 + 157z^2 - 36xy + 108xz - 24yz$ к диагональному виду.

Вопросы к коллоквиуму 1 в 1 семестре:

1. Множества, операции над множествами и их свойства.
2. Функции. Область определения и значения. Инъективные, сюръективные и биективные функции. Композиция и ее ассоциативность.
3. Унарные и бинарные операции. Понятие алгебраической системы. Группы.

4. Группа подстановок. Циклическая запись. Четные и нечетные подстановки. Транспозиции. Разложение в произведение транспозиций.
5. Теорема и четности подстановок.
6. Теорема Лагранжа о подгруппах конечной группы.
7. Кольца. Ассоциативные кольца. Коммутативные кольца и кольца с единицей. Кольцо вычетов по модулю m . Область целостности.
8. Поля. Поле вычетов по простому модулю.

Вопросы к коллоквиуму 2 в 1 семестре:

1. Матрицы над полем. Сложение, умножение на число и умножение матриц.
2. Матрицы и линейные отображения. Свойство ассоциативности умножения матриц.
3. Обратная матрица. Группа обратимых матриц. Единственность обратной матрицы.
4. Определители произвольного порядка. Правила вычисления определителей 2 и 3-го порядка.
5. Свойства определителей (транспонирование, перестановка строк, одинаковые строки, разложение в сумму и т.д.)
6. Формула разложения определителя по строке и столбцу.
7. Формула для обратной матрицы.
8. Определитель произведения двух матриц.

Вопросы к коллоквиуму 1 во 2 семестре:

1. Кольцо многочленов $P[x]$ над полем P .
2. Деление многочленов. Неприводимые многочлены.
3. Схема Горнера.
4. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
5. Свойства НОД.

Вопросы к коллоквиуму 2 во 2 семестре:

1. Разложимость многочленов на простые множители.
2. Рациональные корни целочисленных многочленов.
3. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
4. Свойства многочленов над полем вещественных чисел.

Вопросы к зачету во 2 семестре:

1. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования в данном базисе.
2. Матрица перехода от базиса к базису. Матрицы линейного преобразования в разных базисах.
3. Ортогональные преобразования и матрицы. Критерий ортогональности матрицы.
4. Собственные вектора и собственные значения линейных преобразований и матриц. Алгоритм поиска.
5. Квадратичные формы.
6. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
7. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Вопросы к коллоквиуму 1 в 3 семестре:

1. Коммутативные кольца. Области целостности.
2. Поле частных для области целостности.
3. Конгруенция в кольце. Фактор-множество. Корректность определения операций на классах.
4. Понятие идеала в произвольном ассоциативном кольце. Соответствие между идеалами и конгруенциями. Фактор-кольцо.
5. Множество единиц области целостности.

Вопросы к коллоквиуму 2 в 3 семестре:

1. Кольца главных идеалов.
2. Наибольший общий делитель. Кольца с НОД.
3. Простые элементы кольца.
4. Факториальные кольца.
5. Простые элементы $K[x]$.
6. Факториальность кольца $K[x]$ для факториального K .

7. Симметрические многочлены.
8. Выразимость любого симметрического через простейшие.

Вопросы к экзамену в 3 семестре:

1. Базис и размерность векторного пространства. Теорема о базисе.
2. Векторные пространства. Аксиомы.
3. Евклидовы пространства. Аксиомы.
4. Замена переменных в квадратичной форме. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
5. Изоморфизм векторных пространств. Изоморфизм пространств одной размерности.
6. Лемма о замене.
7. Линейная зависимость в E_2 и в E_3 .
8. Линейная зависимость и независимость в векторных пространствах. Свойства линейной независимости.
9. Линейная зависимость и независимость.
10. Линейные многообразия. Направляющее подпространство и размерность линейного многообразия.
11. Линейные подпространства и линейные многообразия.
12. Линейные подпространства. Линейная оболочка
13. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования в данном базисе. Матрица перехода от базиса к базису. Матрицы линейного преобразования в разных базисах.
14. Многочлены над полем вещественных чисел.
15. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
16. Общее решение однородной системы линейных уравнений. Его размерность. Фундаментальная система решений.
17. Ортогональные преобразования и матрицы. Критерий ортогональности матрицы.
18. Ортонормированный базис из собственных векторов симметрического преобразования.
19. Ортонормированный базис. Теорема об изоморфизме Евклидовых пространств.
20. Основные свойства НОД.
21. Положительно определенные квадратичные формы. Скалярное произведение, соответствующее положительно определенной квадратичной форме.
22. Поля. Аксиомы поля.
23. Поля. Характеристика поля. Отсутствие делителей нуля. Поля вычетов.
24. Процедура ортогонализации и ортогональные базисы в Евклидовых пространствах.
25. Разложимость многочленов на простые множители.
26. Размерность общего решения однородной системы линейных уравнений.
27. Рациональные корни целочисленных многочленов.
28. Свойства ортогональных и ортонормированных систем векторов в Евклидовых пространствах.
29. Собственные вектора и собственные значения линейных преобразований и матриц. Характеристический многочлен матрицы.
30. Схема Горнера.
31. Теорема о базисе.
32. Теорема о делении многочленов в кольце $P[x]$ над полем P .
33. Теорема об общем решении неоднородной системы линейных уравнений.
34. Характеристика поля. Поле вычетов по простому модулю.
35. Расширения полей. Алгебраические элементы. Алгебраические расширения.
36. Многочлены над полем рациональных чисел. Алгебраические числа.
37. Неприводимые многочлены. Минимальный многочлен алгебраического элемента.
38. Существование и строение простого алгебраического расширения.
39. Конечные расширения полей. Связь с алгебраичностью.
40. Теорема о примитивном элементе.
41. Алгебраическое замыкание подполя.
42. Алгебраически замкнутые поля. Вложимость в алгебраически замкнутое поле.
43. Понятие алгебраического замыкания поля. Его единственность.